SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Giovanna Citti

SOLUZIONI FORTI DELL'EQUAZIONE DI LEVI

12 febbraio 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Sunto In questo seminario presentiamo un risultato di regolarità delle soluzioni dell'equazione di Levi. Si tratta di un'equazione quasilineare del secondo ordine, che si può rappresentare come somma di quadrati di campi vettoriali. Precisamente

$$X^2u+Y^2u-(Xa+Yb)\partial_t u = k(\xi,u)(1+a^2+b^2)^{3/2}(1+(\partial_t u)^2)^{1/2}, \qquad (*)$$

dove le funzioni a e b, ed i coefficienti dei campi dipendono dal gradiente di u. L'equazione non si può inquadrare nella nota teoria degli operatori alla Hörmander perché è non lineare, né si può trattare con tecniche di tipo ellittico. Tuttavia era noto un teorema di esistenza di soluzioni lipchitziane per il problema di Dirichlet associato, con dato regolare. In questo lavoro introduciamo opportuni spazi di Sobolev, definiti in termini dei campi X e Y, e proviamo una stima a priori di tipo Cacciopoli per il gradiente intrinseco della soluzione. Di conseguenza proviamo che le soluzioni Lipschitziane dell'equazione hanno derivate seconde in L^2, e verificano $(*)$ puntualmente quasidappertutto.

Abstract In this seminar we present a regularity result for the solutions of the Levi equation. It is a quasilinear second order equation, which can be represented as a sum of squares of vector fields:

$$X^2u+Y^2u-(Xa+Yb)\partial_t u = k(\xi,u)(1+a^2+b^2)^{3/2}(1+(\partial_t u)^2)^{1/2}, \qquad (**)$$

where the functions a and b, and the coefficients of the vector fields depend on the gradient of the solution. The equation can not consider of Hörmander type, since it is nonlinear, nor it can be studied with elliptic techniques. However it was known an existence theorem of Lipschitz continuous solutions of the Dirichlet problem associated to equation $(**)$. In this paper we introduce suitable Sobolev spaces, defined in terms of the vector fields X and Y, and we prove an a Cacciopoli type estimate for the gradient of the solution. As a consequence we deduce that the Lipschitz continuous solutions of the equation has second derivatives in L^2, and satisfies equation $(**)$ almost everywhere.

1 Introduzione

In questo seminario presentiamo un risultato di regolarità negli spazi di Sobolev per le soluzioni Lipschitziane dell'equazione di Levi, ottenuto in collaborazione con Annamaria Montanari. Si dice equazione di Levi

$$\mathcal{L}u = k(\xi, u)(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + (\partial_t u)^2)^{1/2}, \text{ in } \Omega \tag{1}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^3$, $\xi = (x, y, t)$ denota un punto di $\mathbb{R}^3$, k è una funzione di classe $C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, mentre l'operatore di Levi $\mathcal{L}$ è definito

$$\mathcal{L}u = u_{xx} + u_{yy} + 2au_{xt} + 2bu_{yt} + (a^2 + b^2)u_{tt}, \tag{2}$$

e

$$a = a_u = \frac{u_y - u_x u_t}{1 + u_t^2}, b = b_u = -\frac{u_x + u_y u_t}{1 + u_t^2}. \tag{3}$$

Come noto il grafico di ogni soluzione di (1) ha in ogni punto curvatura di Levi k: una nozione che interviene naturalmente nello studio delle proprietà dei domini di olomorfia (si veda [T], oppure [BG1]).

L'operatore si può scrivere formalmente come somma di quadrati di campi vettoriali non lineari. Posto infatti

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \tag{4}$$

se identifichiamo un campo vettoriale con l'operatore che ha gli stessi coefficienti, abbiamo

$$\mathcal{L} = X^2 + Y^2 - (Xa + Yb)\partial_t. \tag{5}$$

Osserviamo che $\mathcal{L}$ non è ellittico perché somma di quadrati di due campi vettoriali in R^3. Nel caso in cui i campi X e Y siano rimpiazzati da campi lineari, a coefficienti C^∞, l'ipotesi che garantisce l'ipoellitticità è la ben nota condizione di Hörmander: $\mathcal{L}$ è ipoellittico se l'algebra di Lie generata dai campi ha rango massimo in ogni punto dello spazio. Se questa è verificata, c'è una teoria ben sistemata della regolarità (si veda [F], [FS], [RS]). Nel caso in esame, invece, i campi X e Y sono nonlineari, e quindi i loro coefficienti hanno soltanto la regolarità della soluzione. In generale quindi non si può nemmeno parlare di algebra di Lie. Tuttavia X e Y soddisfano formalmente la condizione seguente:

$$[X, Y] = -\frac{\mathcal{L}u}{1 + (\partial_t u)^2}\partial_t = -\frac{k(1 + a^2 + b^2)^{3/2}}{(1 + (\partial_t u)^2)^{1/2}}\partial_t$$

Pertanto condizioni di annullamento di k sono condizioni di lineare dipendenza di $X, Y, [X, Y]$ e il comportamento delle soluzioni dell'equazione dipende dagli zeri di k.

Consideriamo per semplicità i due casi in cui k è identicamente nulla e il caso in cui non ha zeri.

Se $k = 0$, ogni funzione u della sola variabile t, è soluzione di $\mathcal{L}u = 0$, e quindi non valgono teoremi di regolarità per le soluzioni dell'equazione. Vale invece un risultato di regolarità delle soluzioni del problema di Dirichlet, dovuto a Bedford e Gaveau:

Identifichiamo R^3 con $C \times R$, che penseremo immerso in C^2, e supponiamo che Ω sia un aperto pseudoconvesso di $C \times R$, e che $\phi \in C^{m+5}(\partial\Omega)$. Supponiamo inoltre che esistano esattamente due punti ellittici p e $q \in \partial\Omega$, tali che il piano tangente al grafico di ϕ in p e q sia una retta complessa, allora il problema di Dirichlet con dato al bordo ϕ ha una soluzione in $C^{m+\alpha}(\Omega) \cap Lip(\bar{\Omega})$, con $0 < \alpha < 1$ (si veda [BG2]).

Come si vede la soluzione perde regolarità sul suo dato al bordo, un risultato che si spiega con la mancanza di ellitticità dell'equazione. Questa si scrive infatti semplicemente

$$X^2u + Y^2u = 0$$

e non è ellittica in R^3. Si può invece interpretare come un Laplaciano su una opportuna varietà bidimensionale. Infatti è stato provato da Ščerbina che,

Se $u \in C^1$, è soluzione di (1), allora il suo grafico è foliato in curve analitiche ([S]).

Se invece k non ha zeri le soluzioni classiche sono regolari:

Supponiamo che $k \in C^\infty(\Omega)$, che u sia un soluzione di (1) di classe $C^{2,\alpha}$, con $\alpha \in]0,1[$. Supponiamo anche che

$$\forall \xi \in \Omega \quad k(\xi) \neq 0$$

allora $u \in C^\infty$ ([C]).

Per quanto riguarda invece risultati di esistenza di soluzioni non regolari del problema, si può applicare una tecnica di regolarizzazione ellittica, che si applica indifferentemente ad entrambi i casi considerati. Infatti, posto

$$\mathcal{L}_\epsilon u = \mathcal{L}u + \epsilon^2 \frac{\partial_{tt} u}{1 + (\partial_t u)^2} \quad \text{in } \Omega \tag{6}$$

questo operatore, somma di quadrati di campi vettoriali linearmente indipendenti è uniformemente ellittico, con piú piccolo autovalore che dipende da ϵ, e tende a 0 per ϵ che tende a zero.

Con questa tecnica Slodkowsky e Tommassini hanno provato il risultato seguente: *Se Ω è pseudoconvesso, e k soddisfa una opportuna ipotesi di tipo geometrico, legata alla curvatura di Levi di $\partial\Omega \times \mathbb{R}$, allora il problema di Dirichlet associato all'equazione* (1), *ha una soluzione viscosa $u \in Lip(\bar{\Omega})$* (see [ST]).

dove la definizione di soluzione viscosa è la seguente

Definizione 1.1 *Una funzione $u \in Lip(\Omega)$ è una soluzione viscosa dell'equazione (1) se esistono una successione (u_j) in $C^\infty(\Omega)$, una successione di numeri positivi $\epsilon_j \to 0$ per $j \to \infty$ e una costante positiva $M > 0$ tali che*

$$(u_j) \text{ converge puntualmente a } u \text{ in } \Omega,$$

$$||Du_j||_\infty \leq M \text{ per ogni } j \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}_{\epsilon_j} u_j = k(\cdot, u_j)(1 + a_j^2 + b_j^2)^{3/2}(1 + (\partial_t u_j)^2)^{1/2} \ \ in \ \Omega. \tag{7}$$

Qui abbiamo indicato rispettivamente a_j e b_j i coefficienti definiti come in (3), in termini del gradiente della funzione u_j.

In questo seminario provo che le soluzioni viscose di (1) sono soluzioni forti nel senso seguente

Definizione 1.2 *Una funzione Lipschitziana u si dice soluzione forte dell'equazione (1) se X^2u, Y^2u, Xa e Yb appartengono ad $L^2_{loc}(\Omega)$, e la relazione*

$$X^2u + Y^2u - (Xa + Yb)\partial_t = k(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + (\partial_t u)^2)^{1/2}$$

è verificata puntualmente quasi dappertutto.

La prova si fa sostanzialmente in due passi: si prova dapprima una disuguaglianza di tipo Cacciopoli per il gradiente delle funzioni u_j che definiscono la soluzione viscosa. Denotati con X_j e Y_j i campi definiti rispettivamente in termini dei coefficienti a_j e b_j, ne viene in particolare che X_j^2, Y_j^2 e $X_j a_j + Y_j b_j$ sono limitati in L^2.

Poi occorre passare al limite per j che tende all' infinito nella relazione (7). Il punto piú delicato di questa seconda parte è il passaggio al limite nel secondo membro e si ottiene dimostrando che

$$a_j \to a \quad b_j \to b$$

per $j \to \infty$ in L^2 e che

$$\partial_t u_j \to \partial_t u \quad in L^2(|k(., u)|) \tag{8}$$

dove $L^2(|k(., u)|)$ indica lo spazio L^2 con peso $|k|$.

Osserviamo esplicitamente che se $k = 0$ la relazione (8) non dice nulla, come è naturale, visto che in questo caso l'equazione non regolarizza nella direzione t. Se invece k non ha zeri, da (8) segue che $D_j u \to Du$ per $j \to \infty$ in L^2.

2 Disuguaglianze di Caccioppoli per il gradiente

La disuguaglianza di Caccioppoli è pressocché immediata per l'operatore di Laplace. Sia per esempio $u \in C^3$ soluzione di

$$\Delta u = f \in H^1$$

allora possiamo derivare entrambi i membri dell'equazione per esempio rispetto a t, moltiplicare per $\partial_t u \phi$, dove $\phi \in C_0^\infty$, ed integrare:

$$\sum_{i=1}^{n} \int \partial^2_{tii} u \partial_t u \phi^2 = \int \partial_t f \partial_t u \phi^2$$

poiché ovviamente ∂_t commuta con ∂_i, possiamo integrare per parti rispetto ad x_i, ed otteniamo

$$-\sum_{i=1}^{n}\int(\partial_{it}^2 u)^2\phi^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\int \partial_{it}^2\partial_t u\partial_t\phi\phi = \int \partial_t f\partial_t u\phi^2$$

Da qui, con una semplice disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n}\int(\partial_{it}^2 u)^2\phi^2 \leq C\sum_{i=1}^{n}\int |\partial_t u||\partial_t\phi| + \int |\partial_t f||\partial_t u|\phi^2$$

e quindi si ha una stima L^2 delle derivate seconde della soluzione, in termini del gradiente di f, e di u.

Le principali difficoltà che si incontrano nel ripetere la stessa prova per l'operatore $\mathcal{L}$ sono le seguenti:

1) l'operatore non è scritto come somma di quadrati di campi vettoriali, ma nella sua espressione compare un termine del primo ordine, con coefficienti del secondo ordine.

2) ∂_t non commuta con il campo X, ed il commutatore dipende da $\partial_t a$, e quindi delle derivate seconde della soluzione.

3) l'aggiunto formale di X è $X^* = -X - \partial_t a$, e dipende anch'esso dalle derivate seconde di u.

Tuttavia l'operatore ha un profondo significato geometrico, e per questo i suoi coefficienti verificano alcune identità notevoli, che consentono di cancellare i termini di secondo ordine, ed ottenere anche in questo caso stime delle derivate seconde in termini del gradiente.

Allo scopo di provarle, supporremo di avere fissato una funzione u di classe C^∞, soluzione dell'equazione regolarizzata

$$\mathcal{L}_\epsilon u = k(\xi, u)(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + (\partial_t u)^2)^{1/2}.$$

I coefficienti a, b sono definiti in termini del suo gradiente.

Osservazione 2.1 *Vale la seguente relazione fra le derivate di u:*

$$Yu = a \quad Xu = -b \tag{9}$$

Si tratta di una verifica diretta, infatti:

$$Yu = \partial_y u + b\partial_t u = \partial_y u - \frac{\partial_x u + \partial_y u\partial_t u}{1 + (\partial_t u)^2}\partial_t u = \frac{\partial_y u - \partial_x u\partial_t u}{1 + (\partial_t u)^2} = a.$$

La seconda identità è analoga.

Una prima conseguenza immediata di (9) è che l'operatore si può scrivere come somma di quadrati di campi vettoriali

Osservazione 2.2 *Per ogni funzione u di classe C^2 si ha*

$$Xa + Yb = -(X^2u + Y^2u)\partial_t u \tag{10}$$

e

$$\mathcal{L}u = (1 + \partial_t u^2)(X^2u + Y^2u) \tag{11}$$

In particolare u risulta soluzione di

$$X^2u + Y^2u + \frac{\epsilon^2 \partial_{tt} u}{(1 + (\partial_t u)^2)^2} = \frac{k(\cdot, u)(1 + a^2 + b^2)^{3/2}}{(1 + (\partial_t u)^2)^{1/2}} \tag{12}$$

Infine osserviamo che i campi X e ∂_t non commutano, ma verificano le seguenti relazioni:

Osservazione 2.3 *Si ha*

$$\partial_t Yu = \frac{Y\partial_t u - \partial_t u X \partial_t u}{1 + (\partial_t u)^2} \quad e \quad \partial_t Xu = \frac{X\partial_t u + \partial_t u Y \partial_t u}{1 + (\partial_t u)^2} \tag{13}$$

e per ogni funzione $f \in C^2(\Omega)$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha:

$$\int \partial_t X f \phi = -\int \partial_t f X \phi \quad e \quad \int \partial_t Y f \phi = -\int \partial_t f Y \phi. \tag{14}$$

Enunciamo ora la diseguaglianza di Cacciopoli in termini dei campi

Teorema 2.1 *Se denotiamo $\omega = \partial_t u$, allora esiste una costante $C > 0$ limitata dalla norma L^∞ del gradiente di u, tale che per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int (|X\omega|^2 + |Y\omega|^2 + \epsilon^2 |\partial_t \omega|^2)\phi^2 \leq$$

$$\leq C \int \Big((|X\phi|^2 + |Y\phi|^2 + |\phi \partial_t \phi| + \epsilon^2 |\partial_t \phi|^2)\omega^2 + \phi^2 \Big).$$

Dimostrazione La prova è esattamente uguale a quella classica A titolo di esempio vediamo come si comportano i primi due addendi dell'equazione (12). Li deriviamo rispetto a t, moltiplichiamo per $\partial_t u \phi^2$ e integriamo. Otteniamo:

$$\int \partial_t X^2 u \partial_t u \phi^2 + \int \partial_t Y^2 u \partial_t u \phi^2$$

(per (14))

$$= -\int \partial_t X u X \partial_t u \phi^2 - \int \partial_t Y u Y \partial_t u \phi^2 +$$

$$-2\int \partial_t X u \partial_t u \phi X \phi - 2\int \partial_t Y u \partial_t u \phi Y \phi =$$

(per (13))

$$= -\int \frac{X\partial_t u + \partial_t u Y \partial_t u}{1 + (\partial_t u)^2} X \partial_t u \phi^2 - \int \frac{Y\partial_t u - \partial_t u X \partial_t u}{1 + (\partial_t u)^2} Y \partial_t u \phi^2 +$$

$$-2\int \frac{X\partial_t u + \partial_t u Y\partial_t u}{1+(\partial_t u)^2}\partial_t u\phi X\phi - 2\int \frac{Y\partial_t u - \partial_t u X\partial_t u}{1+(\partial_t u)^2}\partial_t u\phi Y\phi =$$
$$\leq -\frac{1}{2}\int \frac{(X\partial_t u)^2 + (Y\partial_t u)^2}{1+(\partial_t u)^2}\phi^2 + C\int (\partial_t u)^2((X\phi)^2 + (Y\phi)^2)$$

che è esattamente quello che si ottiene nel caso classico.

Analogamente vale una disuguaglianza di Cacciopoli per Xu e Yu:

Teorema 2.2 *Se definiamo $w = Xu$, oppure $w = Yu$, esiste una costante $C > 0$ che dipende dalla norma L^∞ del gradiente, tale che per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int (|Xw|^2 + |Yw|^2 + \epsilon^2|\partial_t w|^2)\phi^2 \leq$$
$$\leq C\int \Big((|X\phi|^2 + |Y\phi|^2 + \epsilon^2|\partial_t\phi|^2)w^2 + \phi^2\Big).$$

3 Esistenza di una soluzione forte

Proviamo ora il risultato di regolarità delle soluzioni viscose:

Teorema 3.1 *Se $u \in Lip_{loc}(\Omega)$ una soluzione viscosa di (1) allora u è soluzione forte.*

Sia $u \in Lip_{loc}(\Omega)$ una soluzione viscosa di (1). Allora sono definiti $a = a_u$, $b = b_u$ in L^∞, e conseguentemente i campi $X = X_u$ e $Y = Y_u$. Esiste inoltre una successione ϵ_j monotona decrescente a 0 e una successione (u_j) in $C^\infty(\Omega)$ che verificano le condizioni introdotte nella definizione 1.1.

Corollario 3.1 *Le successioni $(X_j^2 u_j)$, $(Y_j^2 u_j)$ e $(\epsilon\partial_{tt}^2 u_j)$ sono limitate in $L^2_{loc}(\Omega)$, mentre (a_j), (b_j) sono limitate in $H^1_{loc}(\Omega)$.*

Dimostrazione Poiché la successione (Du_j) è una successione limitata in $L^\infty(\Omega)$, allora dalle disuguaglianze di Cacciopoli provate nei Teoremi 2.2 e 2.1 segue che

$$(X_j^2 u_j) \quad (Y_j^2 u_j) \quad (\epsilon\partial_t^2 u_j) \text{ sono limitate in } L^2$$

D'altra parte per (9) e (14)

$$\partial_t a_j = \partial_t Y_j u_j = \frac{Y_j\partial_t u_j - \partial_t u_j X_j\partial_t u_j}{1+\partial_t u_j^2},$$

che è limitata in $L^2_{loc}(\Omega)$ per il Teorema 2.1. Inoltre

$$\partial_x a_j = X_j a_j - a_j\partial_t a_j \quad \text{e} \quad \partial_y a_j = Y_j a_j - b_j\partial_t b_j,$$

che sono limitate in $L^2_{loc}(\Omega)$ per l'affermazione (9) e per il Teorema 2.2.

Possiamo pertanto supporre che (a_j) e (b_j) siano convergenti in $L^2_{loc}(\Omega)$, e debolmente in $H^1_{loc}(\Omega)$. Ovverviamo esplicitamente che (Du_j), converge debolmente a Du , e per ogni j a_j dipende in maniera nonlineare da Du_j. Tuttavia utilizzando ancora l'identità (9) che caratterizza i coefficienti dell'equazione, si prova

Proposizione 3.1 *Vale la relazione seguente*

$$lim_{j\to+\infty} a_j = a \quad lim_{j\to+\infty} b_j = b$$

in norma L^2.

Ovviamente basta provare che il limite debole della successione a_j è a.

$$lim_{j\to+\infty} \int a_j\phi = (per(9)) = lim_{j\to+\infty} \int Y_j u_j \phi$$

(per definizione di $Y_j u_j$)

$$= lim_{j\to+\infty} \int (\partial_y u_j + b_j \partial_t u_j)\phi$$

(poiché la successione (b_j) converge in norma e $(\partial_t u_j)$ debolmente in L^2)

$$= lim_{j\to+\infty} \int (\partial_y u + b_j \partial_t u)\phi =$$

(per (9))

$$= lim_{j\to+\infty} \int (\partial_y u - X_j u_j \partial_t u)\phi =$$

$$= lim_{j\to+\infty} \int (\partial_y u - (\partial_x u_j + a_j \partial_t u_j)\partial_t u\phi =$$

(usando ancora il fatto che (a_j) converge in norma e $(\partial_t u_j)$ converge debolmente in L^2)

$$= lim_{j\to+\infty} \int (\partial_y u - \partial_x u \partial_t u - a_j(\partial_t u)^2)\phi$$

Portando a primo membro l'ultimo termine si ha

$$lim_{j\to+\infty} \int (1 + (\partial_t u)^2) a_j \phi = \int (\partial_y u - \partial_x u \partial_t u)\phi$$

e da qui immediatamente la tesi.

Una volta verificata la convergenza dei coefficienti dell'operatore, si prova la convergenza debole del primo membro dell'equazione. Consideriamo per semplicità dapprima i primi due termini:

Proposizione 3.2 *Esiste il seguente limite debole in* L^2.

$$lim_{j\to+\infty} X_j^2 u_j + Y_j^2 u_j = X^2 u + Y^2 u$$

Dimostrazione Se ϕ è una fissata funzione di classe C_0^∞, si ha

$$\int (X_j^2 u_j + Y_j^2 u_j)\phi =$$

(integrando per parti)

$$= \int X_j u_j X_j^* \phi - \int Y_j u_j Y_j^* \phi =$$

Poiché $X_j u_j = -b_j$ converge in $L^2_{loc}(\Omega)$ a $Xu = -b$ e $X_j^*\phi = -\partial_x \phi - a_j \partial_t \phi - \partial_t a_j \phi$ converge debolmente a $X^*\phi$, al limite per $j \to \infty$ otteniamo

$$lim_{j\to+\infty} \int (X_j^2 u_j + Y_j^2 u_j)\phi = \int XuX^*\phi + \int YuY^*\phi.$$

Integrando per parti si ha la tesi.

Analogamente si prova

Proposizione 3.3 *Esiste il seguente limite debole in L^2*

$$lim_{j\to+\infty} X_j a_j + Y_j b_j = Xa + Yb$$

debolmente in L^2.

Proviamo ora la convergenza del terzo addendo che compare nell'espressione di $\mathcal{L}_\epsilon$

Proposizione 3.4 *Nelle ipotesi che abbiamo formulato, esiste il seguente limite debole in L^2:*

$$lim_{j\to\infty} (X_j a_j + Y_j b_j)\partial_t u_j = (Xa + Yb)\partial_t u$$

Dimostrazione

$$\int (X_j a_j + Y_j b_j)\partial_t u_j \phi =$$

$$= \int (X_j a_j + Y_j b_j)\partial_t (u_j \phi) - (X_j a_j + Y_j b_j) u_j \partial_t \phi =$$

$$= \int X_j a_j \partial_t (u_j\phi) + \int Y_j b_j \partial_t (u_j \phi) - \int (X_j a_j + Y_j b_j) u_j \partial_t \phi =$$

(per (14))

$$= -\int a_j \partial_t X_j (u_j \phi) - \int b_j \partial_t Y_j (u_j \phi) - \int (X_j a_j + Y_j b_j) u_j \partial_t \phi =$$

(integrando per parti)

$$= \int \partial_t a_j X_j (u_j \phi) + \int \partial_t b_j Y_j (u_j \phi) - \int (X_j a_j + Y_j b_j) u_j \partial_t \phi.$$

Nel primo integrale usiamo il fatto che $\partial_t a_j$ converge debolmente a $\partial_t a$, e che $X_j(u_j\phi) = X_j u_j \phi + u_j X_j \phi = X_j u_j \phi + u_j(\partial_x \phi + a_j \partial_t \phi)$ converge in norma a $Xu\phi + u(\partial_x \phi + a\partial_t \phi) = X(u\phi)$ Operando in modo analogo con tutti i termini si ottiene l'esistenza del seguente limite

$$lim_{j\to\infty} \int (X_j a_j + Y_j b_j)\partial_t u_j \phi =$$

$$= \int \partial_t a X(u\phi) \int \partial_t b Y(u\phi) - \int (Xa + Yb) u \partial_t \phi =$$

(integrando per parti)

$$= - \int a\partial_t X(u\phi) - \int b\partial_t Y(u\phi) - \int (Xa + Yb) u \partial_t \phi =$$

(per (14))

$$= \int Xa\partial_t(u\phi) \int Yb\partial_t(u\phi) - \int (Xa + Yb) u \partial_t \phi =$$

$$= \int (Xa + Yb)\partial_t u \phi$$

Rimane ora da provare che si può passare al limite sotto al segno di integrale al secondo membro dell'equazione. Il punto più delicato della prova è dimostrare la convergenza di $\partial_t u_j$. Poiché non abbiamo stime del suo gradiente, e quindi non possiamo usare immersioni compatte, useremo invece in maniera essenziale il fatto che l'equazione si può rappresentare in due modi diversi, esattamente come nella prova della Proposizione 3.1.

Si ha infatti in seguente:

Proposizione 3.5 *Esiste il seguente*

$$lim_{j\to\infty} \partial_t u_j = \partial_t u \quad in\ L^2(|k(.,u)|)$$

Dimostrazione

Proviamo preliminarmente che

$$lim_{j\to\infty} \frac{k(\xi, u)}{(1 + (\partial_t u_j)^2)^{1/2}} = \frac{X^2 u + Y^2 u}{1 + a^2 + b^2} \tag{15}$$

debolmente in L^2.

Infatti,

$$lim_{j\to\infty} \frac{k(\xi, u)(1 + a^2 + b^2)^{3/2}}{(1 + (\partial_t u_j)^2)^{1/2}} =$$

(per la convergenza in norma L^2 delle successioni (u_j), (a_j) e (b_j))

$$= lim_{j\to\infty} \frac{k(\xi, u_j)(1 + a_j^2 + b_j^2)^{3/2}}{(1 + (\partial_t u_j)^2)^{1/2}} \partial_t u =$$

(poiché u_j è soluzione di (12))

$$= lim_{j\to+\infty} X_j^2 u_j + Y_j^2 u_j + \frac{\epsilon^2 \partial_{tt}^2 u_j}{(1+(\partial_t u_j)^2)^2} =$$

(per la Proposizione 3.2 e la convergenza a zero di $\epsilon^2\partial_{tt}^2 u_j$ in norma L^2)

$$= X^2 u + Y^2 u$$

Da questa relazione l'affermazione (15) segue subito.

Analogamente

$$lim_{j\to\infty} \frac{k(\xi,u)}{(1+(\partial_t u_j)^2)^{1/2}} \partial_t u_j = \frac{X^2 u + Y^2 u}{1+a^2+b^2} \partial_t u \tag{16}$$

debolmente in L^2. Infatti procedendo come sopra si ha

$$lim_{j\to\infty} \frac{k(\xi,u)(1+a^2+b^2)^{3/2}}{(1+(\partial_t u_j)^2)^{1/2}} \partial_t u_j =$$

$$= lim_{j\to\infty} \left(X_j^2 u_j + Y_j^2 u_j + \frac{\epsilon^2 \partial_{tt}^2 u_j}{(1+(\partial_t u_j)^2)^2} \right) \partial_t u_j =$$

(per 10)

$$= -lim_{j\to\infty} X_j a_j + Y_j b_j =$$

per la Proposizione 3.3

$$= -(Xa + Yb) = \text{ per } (10) \ = (X^2 u + Y^2 u)\partial_t u$$

Infine, sempre nello stesso modo si prova che

$$lim_{j\to\infty} \frac{k(\xi,u)}{(1+(\partial_t u_j)^2)^{1/2}} (\partial_t u_j)^2 = \frac{X^2 u + Y^2 u}{1+a^2+b^2} (\partial_t u)^2 \tag{17}$$

debolmente in L^2. Infatti

$$lim_{j\to\infty} \frac{k(\xi,u)}{(1+(\partial_t u_j)^2)^{1/2}} (\partial_t u_j)^2 = -lim_{j\to\infty} (X_j a_j + Y_j b_j)\partial_t u_j =$$

per la Proposizione 3.4

$$= -(Xa + Yb)\partial_t u = \text{ per } (10) \ = (X^2 u + Y^2 u)(\partial_t u)^2.$$

Dalle uguaglianze (15), (16) e (17) si deduce la convergenza in $L^2(|k(\xi,u)|)$, infatti

$$lim_{j\to\infty} \int |k(\xi,u)| \frac{(\partial_t u_j - \partial_t u)^2}{(1+(\partial_t u_j)^2)^{1/2}} =$$

$$= lim_{j\to\infty} \int |k(\xi,u)| \frac{(\partial_t u_j)^2 + (\partial_t u)^2 - 2\partial_t u_j \partial_t u}{(1+(\partial_t u_j)^2)^{1/2}} = 0$$

Prova del Teorema 3.1 Il Teorema 3.1 risulta sostanzialmente provato: possiamo passare al limite in entrambi i membri dell' equazione (7) e dedurre che u è soluzione forte dell'equazione.

Bibliografia

[BG1] E.Bedford, B.Gaveau, *Hypersurfaces with Bounded Levi Form* , Indiana Univ. Math. J., **27**, 1978, 867-873.

[BG2] E.Bedford, B.Gaveau, *Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in* C^2, Am. J. of Math., **105**, 1983, 975-1009.

[C] G.Citti, C^∞ regularity of solutions of the Levi equation, to appear on *Analyse non Linéaire, Annales de l'I.H.P.*

[CM] G.Citti, A Montanari, *Caccioppoli-type inequalities for the Levi equation*, preprint.

[F] G.b.Folland, *Subelliptic estimates and function on nilpotent Lie groups*, Arkiv f. Mat., **13**, 1975, 161-207.

[FS] G.B. Folland, E.M.Stein, *Estimates for the* $\bar{\partial}_b$ *Complex and Analysis on the Heisenberg Group*, Comm. Pure Appl. Math., **20**, 1974, 429 - 522.

[NSW] A.Nagel, E.M.Stein, S.Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties*, Acta Math., **155**, 1985, 103-147.

[RS] L.Rothschild, E.M.Stein, *Hypoelliptic differential operators and nihilpotent Lie groups*, Acta Math., **137**, 1977, 247-320.

[S] N.V.Ščerbina, The Levi form for C^1-smooth hypersurfaces, and the complex structure on the boundary of domains of holomorphy. *Math. USSR Izves.* **19** (1982), 171 - 188.

[ST] Z.Slodkowski, G.Tomassini, Weak solutions for the Levi equation and Envelope of Holomorphy, *J. Funct. Anal* **101**, no. 4 (1991), 392-407.

[T] G.Tomassini, Geometric Properties of Solutions of the Levi Equation, *Ann. di Mat. Pura e Appl*, **152** (1988), 331-344.